

Verificação experimental da hipótese de Boussinesq para escoamento de camada limite turbulenta

Experimental verification of the Boussinesq's hypothesis for turbulent boundary layer flow

Gabriel Borelli Martins^{a*}, Sara Rodriguez^b

Resumo

A hipótese de Boussinesq é comumente utilizada no fechamento de vários modelos de turbulência devido à sua robustez e baixo custo computacional. No entanto, ela possui diversas fragilidades. Este trabalho sobreleva uma das considerações pressuposta pela hipótese: a de que o tensor taxa de deformação médio e o tensor anisotrópico das tensões de Reynolds possuem as mesmas direções principais. Fisicamente nada impõe esta condição e, de fato, como observado experimentalmente em um escoamento de camada limite turbulenta, tal condição não é necessariamente verdadeira. Os experimentos foram realizados no túnel de vento de camada limite atmosférica do Instituto de Pesquisas Tecnológicas de São Paulo (IPT) e foi observado que, na região logarítmica da camada limite turbulenta, os ângulos entre as direções principais dos dois tensores são maiores quanto mais se aproxima da parede. Por outro lado, quanto mais distante da parede mais os ângulos tendem a se igualar.

Abstract

The Boussinesq's hypothesis is frequently used for the closure of many turbulence models mainly because of its stiffness and low computational cost. However, it does not always represent correctly the physical problem. In this paper, one of the considerations behind Boussinesq's hypothesis is explored: the idea that the mean strain tensor and the anisotropic Reynolds stress tensor have the same principal directions. Actually, nothing is forcing that condition and it may not be true as will be shown experimentally for the case of a turbulent boundary layer flow. The experiments were done at the

a Instituto de Pesquisas

Tecnológicas do Estado de São Paulo S.A., Laboratório de Vazão. São Paulo-SP, Brasil.

b Escola Politécnica da USP.

São Paulo-SP, Brasil.

*E-mail: gborelli@ipt.br

Palavras-chave:

hipótese de Boussinesq, turbulência, tensões de Reynolds, túnel de vento.

Keywords:

Boussinesq's hypothesis, turbulence, Reynolds stress, wind tunnel.

Boundary Layer Wind Tunnel of the Institute for Technological Research (IPT), in São Paulo, Brazil. It was observed that in the region where a log law is respected, the angle between the principal directions of the two tensors increases with the proximity of the wall. In the region far from the wall, the principal directions tend to match.

1 Introdução

Aplicando-se a decomposição de Reynolds às equações de Navier-Stokes surgem as tensões de Reynolds, culminando em um problema de fechamento. São quatro equações para dez incógnitas (o tensor das tensões de Reynolds é simétrico). A medida adotada por muitos modelos, como o $k-\epsilon$, é de utilizar a hipótese de Boussinesq. Uma curiosidade a ser salientada é a de que o trabalho de Boussinesq (1877) é anterior ao de Reynolds (1895), o qual introduziu formalmente o tensor das tensões, oriundo da parcela advectiva não linear da equação de Navier-Stokes (SCHMITT, 2007).

De fato, conforme salientado por Schmitt (2007), Boussinesq não apresenta o mesmo rigor que Reynolds na obtenção das equações do escoamento médio e acaba por desconsiderar as correlações entre as componentes flutuantes da velocidade. Contudo, intuitivamente, prevê algumas situações para as quais as equações que propõe não são válidas e introduz o que seria o tensor de Reynolds de forma implícita.

A hipótese de Boussinesq trata de uma aproximação por vezes questionável. Entretanto, é largamente utilizada em diversos modelos de turbulência devido à sua robustez e baixo custo computacional. Uma análise deve ser feita para cada situação com o objetivo de avaliar se as simplificações adotadas são razoáveis e se os erros são adequados ao objeto de estudo. Neste trabalho, serão apresentados os resultados experimentais de um escoamento de camada limite turbulenta. Será demonstrado como, neste tipo de escoamento, alguns princípios pressupostos pela hipótese de Boussinesq não são respeitados. Em especial, será estudado o alinhamento entre as direções principais do tensor taxa de deformação médio e as direções principais da parcela anisotrópica do tensor das tensões de Reynolds.

2 A hipótese de Boussinesq

A hipótese de Boussinesq corresponde a uma relação linear entre o tensor das tensões anisotrópico, R_{ij} , e o tensor médio da taxa de deformação, S_{ij} , para o fechamento das equações médias RANS (SCHMITT, 2007). Tal relação é dada por:

$$R_{ij} = -2\nu_T S_{ij} \quad (1)$$

Sendo

$$R_{ij} = \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

Nas equações acima, $\overline{u_i u_j}$ é o tensor das tensões de Reynolds, k é a energia cinética turbulenta, definida como $k = 1/2 \overline{u_i u_i}$ e ν_T é um escalar denominado viscosidade turbulenta. Nota-se que esta definição é análoga à relação entre o tensor das tensões viscosas e o tensor taxa de deformação médio para fluidos Newtonianos, em que ν é a viscosidade cinemática do fluido. Contudo, existe uma diferença elementar: ν é uma propriedade do fluido, ao passo que ν_T não é. O valor de ν_T depende do tensor das tensões de Reynolds e, portanto, do escoamento em si. A turbulência trata-se de uma propriedade do escoamento e não do fluido (TENNEKES; LUMLEY, 1972).

Outro aspecto a ser considerado, e que será discutido no decorrer deste artigo mediante utilização de dados experimentais, são as implicações por trás da proposta de Boussinesq. Para que os tensores R_{ij} e S_{ij} sejam proporcionais, a mesma direção principal deve ser observada. Esta hipótese nem sempre é válida, inclusive no exemplo de camada limite turbulenta que será apresentado. Para este caso a hipótese pressupõe isotropia das tensões normais, ou seja, $\overline{u_i^2} = 2k/3$, o que não ocorre, como será visto no decorrer deste artigo.

Wilcox (1993) apresenta uma discussão detalhada sobre a hipótese de Boussinesq, enfatizando suas deficiências de forma a justificar a consideração de aproximações mais sofisticadas do tensor das tensões de Reynolds. Ele lista o seguinte grupo de situações de escoamentos em que a hipótese de Boussinesq tem provado ser inadequada:

- Escoamento com alterações súbitas na taxa de tensão média;
- Escoamentos sobre superfícies curvas;
- Escoamento em dutos ou, em geral, aqueles que contêm movimentos fluidos secundários, incluindo a separação da camada limite; e
- Escoamentos tridimensionais.

Não é escopo deste trabalho discutir cada uma das situações acima. Para maiores detalhes deve-se recorrer a Wilcox (1993).

3 O tensor taxa de deformação médio

No caso estudado, foi considerado escoamento de camada limite plenamente desenvolvido, sendo U (velocidade média na direção x) a única componente média da velocidade não nula. Além disso, as variações da velocidade média ocorrem exclusivamente na direção y (vide sistema de coordenadas utilizado na **Figura 1**). Deste modo, o tensor taxa de deformação médio pode ser descrito por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial U}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Os autovetores deste tensor de segunda ordem fornecem as direções principais. Nota-se que as direções principais independem do valor específico assumido por $\partial U/\partial y$ se considerado que S_{ij} tem o formato indicado acima para qualquer ponto da região em estudo. Os autovetores formam uma nova base ortonormal, rotacionada 45° no plano xy em relação à base canônica original.

4 Metodologia

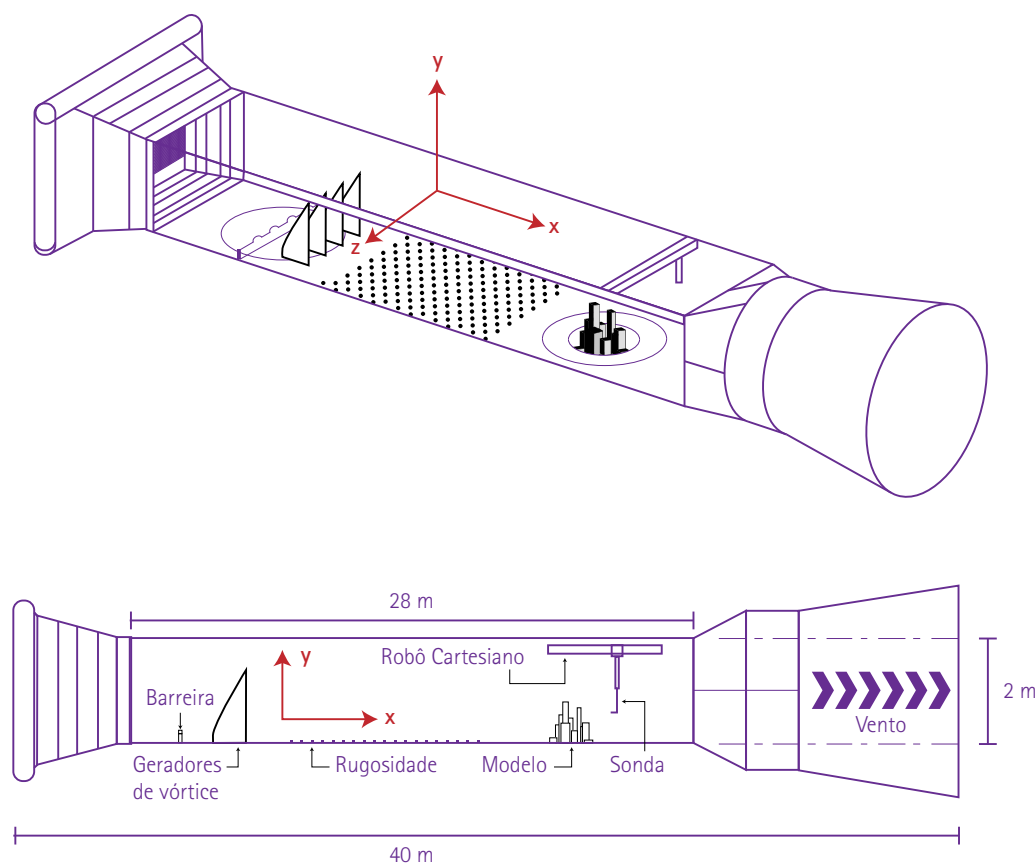
Para a determinação do tensor das tensões de Reynolds em um escoamento de camada limite turbulenta, foi realizado um ensaio no túnel de vento de camada limite atmosférica do IPT. A **Figura 1** apresenta o túnel de vento com seus elementos principais, bem como o sistema de coordenadas adotado ao longo deste artigo.

As medições simultâneas das flutuações das três componentes de velocidade foram realizadas com um anemômetro de fio quente 3D à taxa de amostragem de 2000 Hz. Para tanto, nenhum elemento rugoso adicional foi fixado ao piso do túnel de vento. As medições foram realizadas entre 18 mm e 598 mm do piso do túnel de vento, sendo que a altura máxima foi definida como a altura de referência y_{ref} para posterior adimensionalização. Praticamente, todo o intervalo segue a lei logarítmica dada na **equação 5**, como mostrado no gráfico da **Figura 2**. Nesta equação, u_τ é a velocidade de atrito, κ é a constante de von Kármán (que vale 0,4) e y_0 é o comprimento de rugosidade.

$$U(y) = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \quad (5)$$

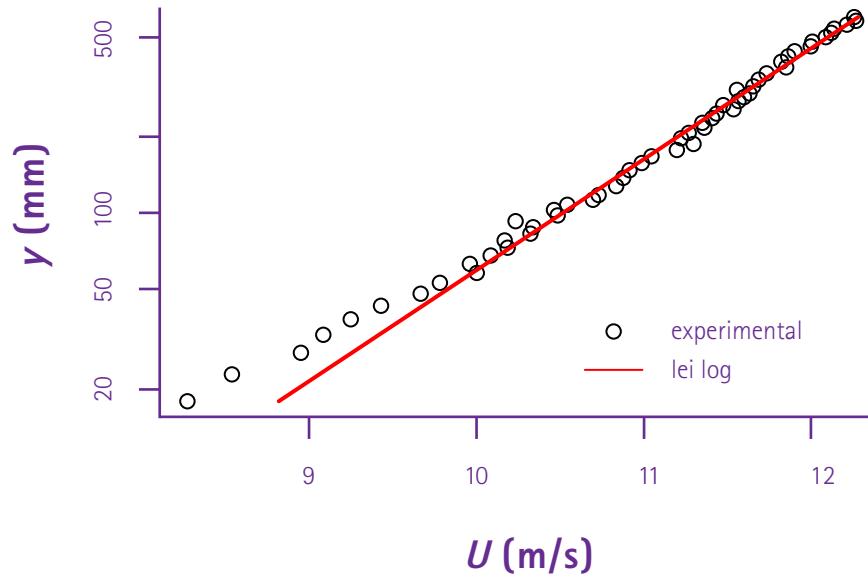
Em posse das medições das componentes de velocidade nas três direções, foi possível determinar o tensor das tensões de Reynolds e seus respectivos autovetores para cada altura medida. A partir destas informações, as direções principais do tensor anisotrópico das tensões puderam ser comparadas às direções principais do tensor taxa de deformação médio.

Figura 1 – Túnel de vento do IPT com indicação do sistema de coordenadas adotado



Fonte: elaborado pelos autores

Figura 2 – Perfil de velocidade média medido, com linha de ajuste (vermelho) para lei logarítmica



Fonte: elaborado pelos autores

5 Resultados

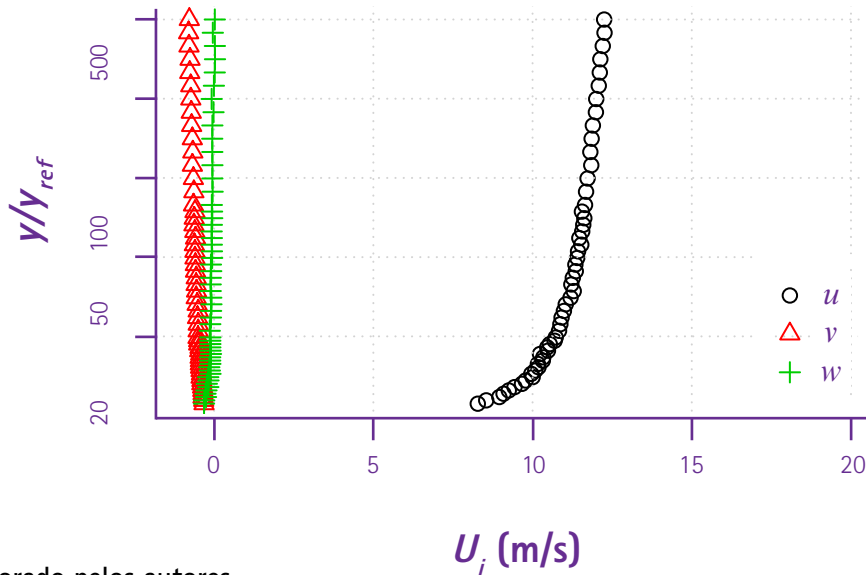
A partir das séries temporais de velocidade, medidas com o anemômetro de fio quente, as velocidades médias U , V e W , correspondentes às direções x , y e z , respectivamente, foram determinadas (gráfico da **Figura 3**). As tensões de Reynolds foram então calculadas. O gráfico que apresenta os componentes do tensor das tensões de Reynolds (adimensionalizados pelo quadrado da velocidade de atrito) é dado na **Figura 4**.

Conforme o esperado, as velocidades médias nas direções y e z , bem como as componentes uw e vw aproximam-se de zero. Deste modo, o tensor $u_i u_j$ varia com a altura com a configuração mostrada abaixo.

$$\overline{u_i u_j} = \begin{pmatrix} \overline{u^2} & \overline{uv} & 0 \\ \overline{uv} & \overline{v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{w^2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

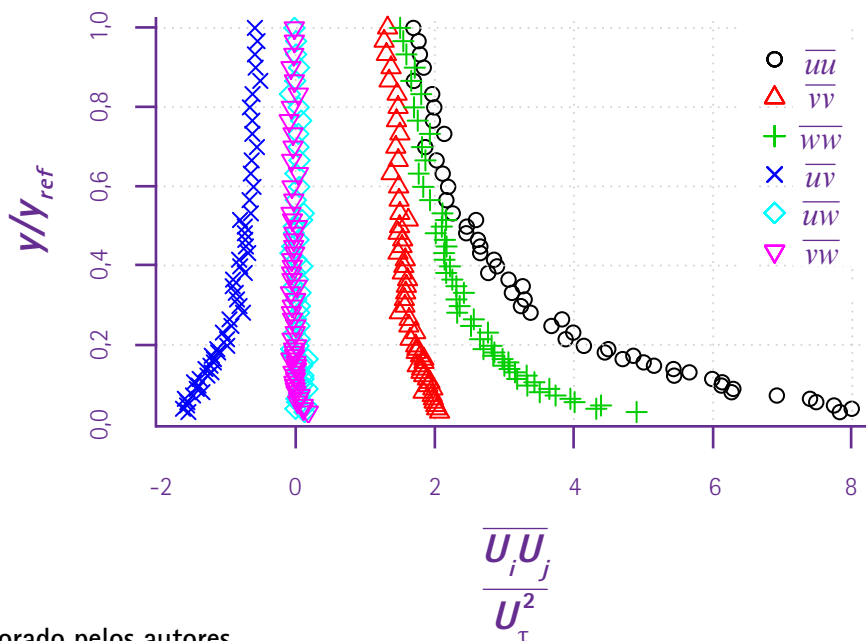
O único modo de R_{ij} ser proporcional a S_{ij} é quando uu , vv e ww são iguais. Pelo gráfico da **Figura 4**, observa-se que isso não ocorre, principalmente nas regiões mais próximas da parede.

Figura 3 - Velocidades médias nas direções x, y e z em função da distância normalizada y/y_{ref}



Fonte: elaborado pelos autores

Figura 4 - Tensões de Reynolds em função da distância normalizada y/y_{ref}



Fonte: elaborado pelos autores

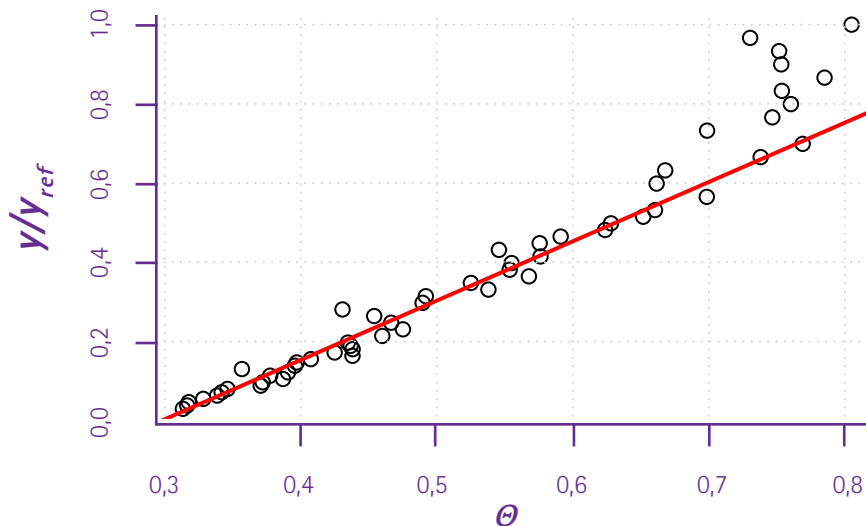
Com o cálculo dos autovalores do tensor anisotrópico R_{ij} para cada altura, pode-se comparar as direções desta base ortonormal com a base ortonormal do tensor taxa de deformação médio previamente determinado. Como a base formada pelos autovetores de R_{ij} é uma rotação ao redor do eixo z na base canônica, à exemplo da base formada pelos autovetores do tensor taxa de deformação médio, pode-se fazer a comparação como segue:

$$\Theta = \frac{\theta_R}{\theta_S} \quad (7)$$

sendo θ_R o ângulo formado entre a base canônica e uma das direções principais no plano xy do tensor R_{ij} e θ_S o ângulo formado entre a base canônica e uma das direções principais no plano xy do tensor S_{ij} (45°).

A **Figura 5** mostra a variação de Θ com a altura. Nota-se que o ângulo entre as direções principais de R_{ij} e S_{ij} diminui conforme altura aumenta, o que condiz com as observações anteriores. Além disso, nota-se que a variação de Θ , no caso estudado, é aproximadamente linear para $y/y_{ref} < 0,7$.

Figura 5 - Valor de Θ em função da distância normalizada y/y_{ref}



Fonte: elaborado pelos autores

6 Conclusões e discussão

Verificou-se que, no escoamento de camadas limites turbulentas, o tensor taxa de deformação médio possui direções principais distintas às direções principais do tensor das tensões anisotrópico, oriundo do termo advectivo da equação de Navier-Stokes. Para a região cuja velocidade média na direção do escoamento pode ser descrita com um modelo logarítmico (vide **equação 5**), foi observado que quanto mais próximo da parede maior o ângulo entre as direções principais dos dois tensores. Para regiões distantes da parede as direções principais se aproximam, de modo que a suposição de proporcionalidade entre R_{ij} e S_{ij} torna-se mais razoável.

A razão entre os ângulos formados entre as direções principais dos dois tensores e a base canônica (θ), partindo da parede, cresce até certa altura de forma aproximadamente linear. Futuramente pretende-se repetir o experimento variando a rugosidade da parede para verificar se este comportamento se reproduz.

O modelo linear de viscosidade turbulenta da hipótese de Boussinesq é empregado em diversos modelos para o cálculo de escoamento turbulento devido ao seu baixo custo computacional e robustez. Contudo, dependendo da situação estudada, tal aproximação não pode ser aplicada. Uma dependência geral entre o tensor taxa de deformação médio e o tensor das tensões de Reynolds é dado por um tensor de quarta ordem como segue (MONIN; YAGLOM, 1979):

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - T_{ijkl} S_{ij} \quad (8)$$

7 Referências

BOUSSINESQ, L. **Essai sur la théorie des eaux courantes**. Paris: Imprimerie Nationale, 1877.

MONIN, A. S.; YAGLOM, A. M. **Statistical fluid mechanics: Mechanics of turbulence**. Cambridge, USA: MIT Press, 1979. v. 1.

REYNOLDS, O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A**, London, v. 186, p. 123-164, 1895.

SCHMITT, F. G. About boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity. **Comptes Rendus Mécanique**, v. 335, n. 9-10, p. 617-627, Sept./Oct. 2007.

TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. **A first course in turbulence**. Cambridge, USA: MIT Press, 1972.

WILCOX, D. C. **Turbulence modeling for CFD**. La Canada, CA: DCW Industries, 1993.